г. Харьков 20. X. 55 г.
Э. [illegible]

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 18

Г. М. МИРАКЬЯН

ПРЯМОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1955

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу этой книжки было положено содержание моей лекции, прочитанной в марте 1953 г. участникам 12-й Одесской математической олимпиады для учащихся старших классов средней школы. Олимпиада была организована и проводилась при физико-математическом факультете Одесского государственного университета им. И. И. Мечникова. Упомянутая лекция содержала лишь §§ 2, 5 и 8 в том виде, как они изложены в настоящей книжке, остальные параграфы, представляющие не меньший интерес, естественно, не могли войти в одну двухчасовую лекцию.

Содержание книжки вполне доступно для учеников девятого и десятого классов, так как по применяемым методам решения задач она не выходит за рамки курса математики средней школы, хотя по существу это — задачи высшей математики.

Считаю необходимым выразить благодарность Э. П. Тихоновой, способствовавшей своими ценными замечаниями улучшению этой книжки.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Из курса геометрии средней школы известно, что *цилиндрическая поверхность получается в результате перемещения прямой линии (образующей) параллельно заданному направлению вдоль некоторой кривой (направляющей).*

Если направляющая является окружностью, а образующая перпендикулярна плоскости окружности, то мы получим *прямой круговой цилиндр.* Другими словами, прямой круговой цилиндр можно определить так: *прямой круговой цилиндр — это поверхность, образованная вращением одной из параллельных прямых вокруг другой, принятой в качестве оси вращения.*

Прямым круговым цилиндром называют также часть его, заключённую между двумя плоскостями, перпендикулярными к его оси; тогда расстояние между этими плоскостями называется *высотой цилиндра.*

Из курса школьной геометрии также известно, что объём цилиндра с радиусом основания R и высотой H равен

$$\pi R^2 H,$$

боковая поверхность равна

$$2\pi RH$$

и полная поверхность равна

$$2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R).$$

Естественно, возникает вопрос, что ещё можно узнать о прямом круговом цилиндре.

На первый взгляд может показаться, что всё существенное о прямом круговом цилиндре этим исчерпывается. Однако это не так. Из этой книжки читатель узнает, что с прямым круговым цилиндром, такой простой, казалось бы, геометрической поверхностью, связано много интересного.

Отметим, что прямой круговой цилиндр имеет большое применение в технике; с примерами прямого кругового цилиндра мы часто встречаемся и в повседневной жизни. Ось в механизме и машине, поверхность подшипника оси, обод маховика, боковые поверхности разных труб, нефтяная цистерна, наконец, консервная банка и рулон газетной бумаги — все эти предметы имеют форму прямого кругового цилиндра.

В дальнейшем мы будем прямой круговой цилиндр называть просто цилиндром.

§ 1

Разрежем прямой круговой цилиндр с радиусом основания R и высотой H вдоль одной из его образующих и затем выпрямим эту поверхность; тогда получим прямоугольник с основанием $2\pi R$ и с высотой H. Будем называть этот прямоугольник *развёрткой* рассматриваемого *цилиндра на плоскость*. Эту же развёртку можно получить иначе, не разрезая цилиндра. Представим себе, что поверхность цилиндра покрыта свежей краской и цилиндр лежит на плоскости, касаясь её вдоль одной из своих образующих. Будем теперь катить цилиндр по плоскости без скольжения; тогда на плоскости при одном обороте цилиндра получится отпечаток поверхности цилиндра в виде прямоугольника с основанием $2\pi R$ и с высотой H, т. е. прежняя развёртка. И наоборот, каждый прямоугольник с основанием a и с высотой b можно рассматривать как развёртку прямого кругового цилиндра с высотой b и с радиусом основания $\frac{a}{2\pi}$.

Легко видеть, что развёрткой бесконечного цилиндра радиуса R является часть плоскости, заключённая между двумя параллельными прямыми, удалёнными друг от друга на расстояние $2\pi R$.

Отметим, что не всякую поверхность можно развернуть на плоскость, например, поверхность шара нельзя развернуть на плоскость. Поверхность прямого кругового конуса можно развернуть на плоскость; в этом случае развёрткой будет круговой сектор.

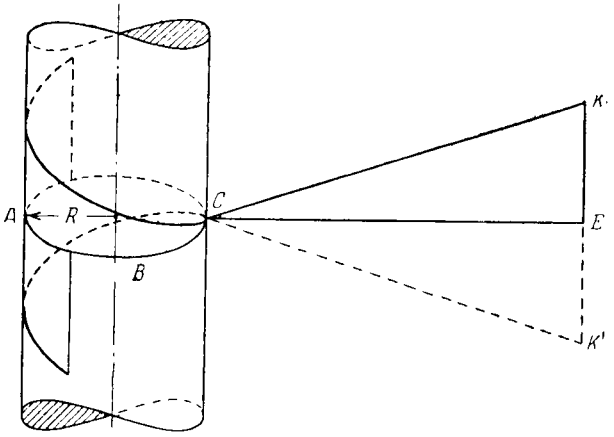
В дальнейшем мы будем пользоваться развёрткой цилиндра.

Познакомимся теперь с одной кривой линией, непосредственно связанной с цилиндром.

Возьмём на цилиндре радиуса R окружность ABC, лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра, и будем прямоугольный треугольник KEC наматывать на цилиндр так,

чтобы катет CE наматывался на окружность ABC; тогда гипотенуза CK расположится на цилиндре в виде отрезка кривой линии, которая называется *винтовой линией* (черт. 1).

Повернём треугольник KCE на 180° вокруг катета CE и будем наматывать его на цилиндр в направлении, противоположном тому, в котором наматывался треугольник KCE сначала; тогда получим другой отрезок винтовой линии, являющийся продолжением уже полученного (на черт. 1 второе



Черт. 1.

положение ΔKCE обозначено через CEK'). При неограниченном удлинении катета CE получается вся винтовая линия.

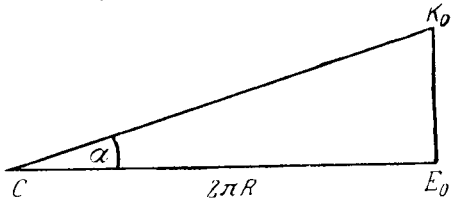
Витком винтовой линии называется отрезок этой линии между двумя последовательными точками пересечения её с одной и той же образующей. *Шагом винта* h называется расстояние между этими точками образующей. Угол KCE называется *углом подъёма винтовой линии* и обозначается α. Для определения длины l одного витка и шага винта h рассмотрим прямоугольный треугольник CE_0K_0, у которого катет CE_0 равен $2\pi R$, а угол K_0CE_0 равен углу подъёма α (черт. 2). Легко видеть, что гипотенуза K_0C равна длине l витка, а катет K_0E_0 равен шагу винта h.

Поэтому имеем формулы

$$l = \frac{2\pi R}{\cos \alpha}, \tag{1}$$

$$h = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha. \tag{2}$$

Винтовые линии бывают правовинтовые и левовинтовые. Предположим, что по винтовой линии движется точка. Проекцией винтовой линии на плоскость, перпендикулярную к её оси (будем называть осью винтовой линии ось цилиндра, на котором она расположена), будет, очевидно, окружность. Поэтому если смотреть на винтовую линию в направлении её оси, то будет казаться, что точка движется по окружности. Если точка движется по окружности по часовой стрелке, удаляясь от нас, то винтовая линия называется *правовинтовой*, если же она движется по часовой стрелке, приближаясь к нам, то винтовая линия называется *левовинтовой*. Правовинтовую и левовинтовую линии на одном и



Черт. 2.

том же цилиндре с одинаковым углом подъёма совместить нельзя. На черт. 1 у нас получилась левовинтовая линия; чтобы получить правовинтовую линию, нужно наматывать треугольник в противоположном направлении.

В природе форму винтовой линии имеют усики вьющихся растений. Для примера можно указать на усики винограда, хмеля, фасоли, гороха и других растений, причём усики, закручиваясь, образуют правовинтовую линию, если усик встречает опору слева от себя. Если же при своём перемещении (так называемое нутационное движение усика, при котором усик описывает в пространстве конус) вертикальная опора встречается справа, то, обвиваясь вокруг этой опоры, усик образует левовинтовую линию [1]).

Что касается стеблей вьющихся растений, то они обвиваются вокруг опоры также по винтовой линии, но при этом каждый вид завивается в совершенно определённом напра-

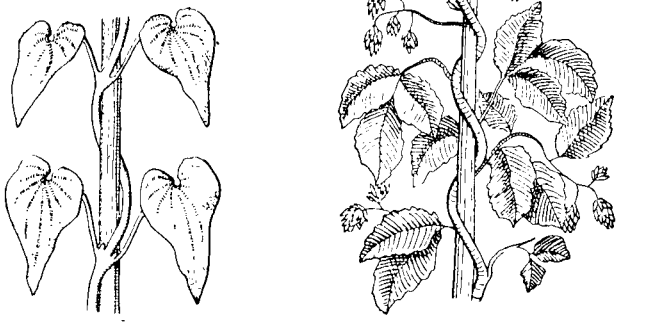
---

[1]) В книге В. Бляшке «Дифференциальная геометрия» (ОНТИ, 1935), стр. 40 ошибочно отмечается, что «усики винограда растут, закручиваясь положительно, а усики хмеля — отрицательно» (положительное закручивание соответствует правовинтовой линии, отрицательное — левовинтовой).

влении. Большинство вьющихся растений, обвиваясь, образует правовинтовую линию; в качестве примера можно привести фасоль, крученый паныч, вьюнок полевой, батат и др.; левовинтовую линию образуют хмель и жимолость.

С примерами винтовой линии мы часто встречаемся в физике и технике.

Форму винтовой линии с очень малым углом подъёма имеет каждый слой проволоки в индукционной катушке. При равномерной подаче резец токарного станка при обточке цилиндра оставляет на этом цилиндре след в виде винтовой линии. Форму винтовой линии имеет режущая кромка цилиндрических спиральных свёрл. Форма нарезки на всякого рода скрепляющих, регулировочных



а) *б)*

Черт. 3. а) Стебель батата, обвиваясь, образует правовинтовую линию. б) Стебель хмеля, обвиваясь, образует левовинтовую линию.

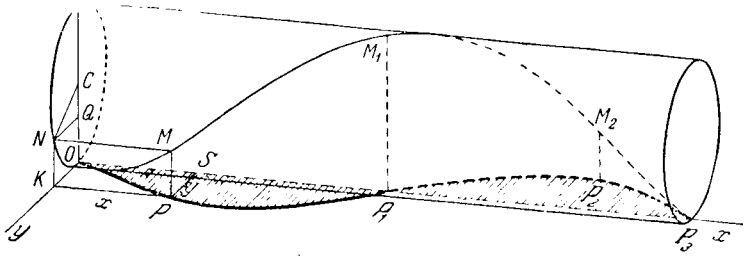
винтах, болтах и гайках — винтовая линия (причём, как правило, применяется правовинтовая нарезка). При прямолинейном равномерном полёте точка на пропеллере самолёта описывает винтовую линию. Точно так же винтовую линию описывает точка на гребном винте как океанского парохода, так и моторной лодки. Форму винтовой линии имеет штопор, употребляемый для раскупоривания бутылок. Винтовую линию описывает точка крыла самолёта, когда он «входит в штопор». При прямолинейном равномерном полёте винтовочной пули, а также артиллерийского

снаряда точки на их поверхности описывают винтовые линии. Во всех перечисленных примерах научно-технического характера при производимых расчётах используются те или иные свойства винтовой линии. Число и характер приведённых примеров говорят о важных практических применениях винтовой линии.

Рассмотрим некоторые свойства винтовой линии.

Покажем, что *проекция винтовой линии на плоскость, параллельную её оси, есть синусоида.*

Пусть винтовая линия расположена на цилиндре радиуса R и имеет шаг винта h. Для доказательства сформулированного предложения, очевидно, достаточно рассмотреть проекцию



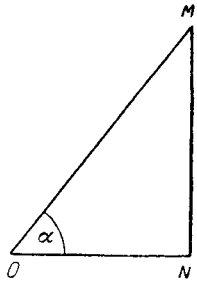
Черт. 4.

одного витка. Пусть $OMM_1M_2P_3$ — виток винтовой линии, расположенный на «отрезке» цилиндра длины h, а $OPP_1P_2P_3$ — его проекция на плоскость, касающуюся цилиндра вдоль образующей OP_3 (черт. 4). Введём в касательной плоскости прямоугольную систему координат с началом в точке O, осью Ox вдоль образующей OP_3, а осью Oy вдоль перпендикуляра к OP_3 в точке O.

Обозначим через P проекцию произвольной точки M на витке. Опустим из P перпендикуляр PS на ось Ox и обозначим через x длину отрезка OS, а через y — длину перпендикуляра PS; тогда абсцисса точки P будет равна x, а ордината — y. Когда точка P перемещается вдоль проекции винтовой линии, координаты её x и y меняются, причём между ними существует какая-то зависимость. Эту зависимость нам и нужно установить.

Спроектируем точки M и P на плоскость основания цилиндра в точки N и K (черт. 4). Пусть точка C — центр окружности основания. Соединим точку C с точкой N и затем из точки N опустим перпендикуляр NQ на прямую OC.

Отметим, что $MN = KP = OS = x$ и, кроме того, $NQ = OK = PS = y$. Развернув часть NOM цилиндрической поверхности, получим прямоугольный треугольник NOM (на черт. 5 линейные размеры треугольника NOM увеличены вдвое).



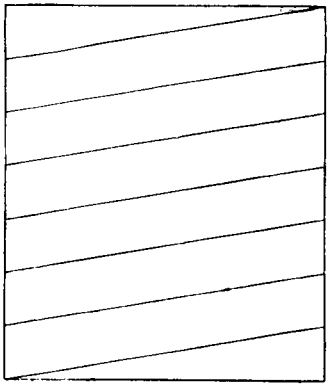
Черт. 5.

Угол MON, равный углу подъёма α, определяется из равенства (2):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi R}.$$

Из черт. 5 находим, что катет $ON = MN \operatorname{ctg}\alpha = x \operatorname{ctg}\alpha = x\,\frac{2\pi R}{h}$.

Теперь легко найти радианную меру центрального угла OCN (черт. 4), а именно $\angle\, OCN = \frac{\text{дл. } \overset{\smile}{ON}}{R} = x\,\frac{2\pi R}{h} : R = \frac{2\pi x}{h}$. Далее из прямоугольного треугольника CQN, зная гипотенузу $CN = R$ и острый угол $OCN = \frac{2\pi x}{h}$, найдём катет NQ:


Черт. 6.

$$NQ = CN \sin \angle\, OCN = R \sin \frac{2\pi x}{h}.$$

А так как $NQ = y$, то

$$y = R \sin \frac{2\pi x}{h},$$

то-есть проекция винтовой линии является синусоидой.

Если поверхность цилиндра с начерченной на ней винтовой линией разрезать вдоль какой-нибудь образующей и затем развернуть на плоскость, то на развёртке винтовая линия изобразится рядом наклонных, параллельных и равноотстоящих друг от друга отрезков (черт. 6).

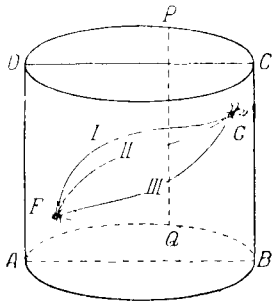
Решим теперь такую задачу.

Пусть на поверхности цилиндра находится в точке F паук и в точке G муха (черт. 7).

Вдоль какой линии — FIG, или $FIIG$, или $FIIIG$, или вдоль какой-нибудь другой линии, соединяющей точки F

и G, должен двигаться к мухе паук, чтобы его путь был кратчайшим?

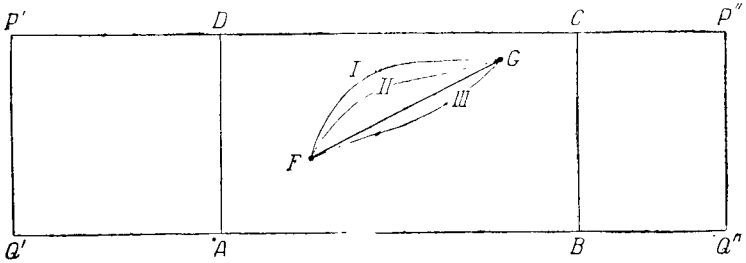
При решении задачи мы исключаем случай, когда точки F и G находятся на одной образующей или на одной окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси



Черт. 7.

цилиндра. Легко видеть, что кратчайший путь в этом случае будет вдоль отрезка образующей или (соответственно) вдоль меньшей дуги окружности.

Пусть плоскость $ABCD$, проходящая через ось цилиндра, такова, что паук и муха находятся на одной и той же половине цилиндра. Тогда, разрезав поверхность цилиндра



Черт. 8.

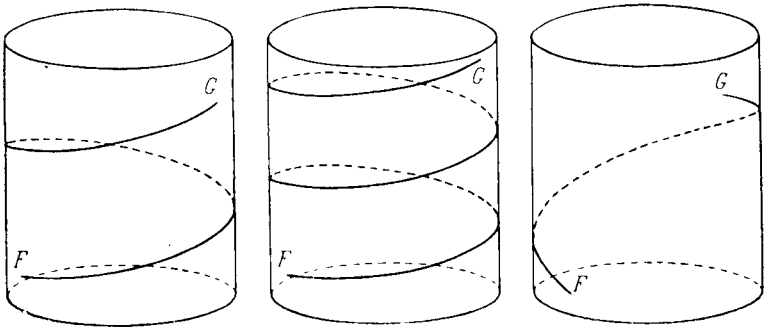
по какой-нибудь образующей PQ другой половины, перейдём к рассмотрению развёртки (черт. 8).

Кратчайшим путём между двумя точками на плоскости будет путь вдоль прямой, проходящей через эти точки; по-

этому проведём прямую FG и свернём из прямоугольника $P'Q'P''Q''$ снова цилиндр. При этом отрезок FG, не меняя своей длины, перейдёт в отрезок винтовой линии. Следовательно, *кратчайшими линиями на поверхности цилиндра являются винтовые линии*. Итак, пауку следует двигаться к мухе по винтовой линии, соединяющей F и G.

Однако не всякая винтовая линия, проходящая через точки F и G, является кратчайшей; через точки F и G можно провести бесконечное число винтовых линий, совершающих любое число оборотов в ту или иную сторону между точками F и G (некоторые из них изображены на черт. 9).

Однако эти отрезки винтовых линий не могут получиться в результате проведённого выше решения.



Черт. 9.

Винтовые линии, образующие, окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра, являются геодезическими линиями на прямом круговом цилиндре [1]) так же, как прямые на плоскости и большие круги на сфере. Отметим здесь, что хотя кратчайшие линии на поверхности (например, на цилиндре) являются геодезическими, геодезические линии не всегда являются кратчайшими (как мы видели, между двумя точками на цилиндре можно провести винтовую линию, не являющуюся кратчайшей).

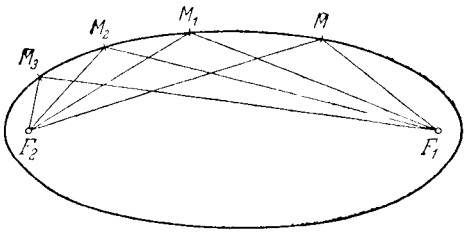
---

[1]) О геодезических линиях см., например, популярную книжку Л. А. Люстерника «Геодезические линии — кратчайшие линии на поверхности» (ГТТИ, 1940). Теория геодезических линий изучается в курсах высшей математики — *Теории поверхностей* и *Вариационном исчислении*.

§ 2

В этом параграфе мы рассмотрим сечения цилиндра плоскостью.

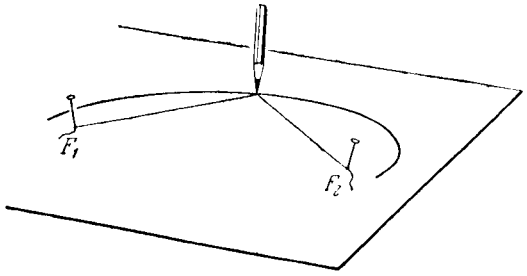
Познакомимся предварительно с кривой, называемой эллипсом. *Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных*



Черт. 10.

точек плоскости есть величина постоянная и больше расстояния между этими точками. Две заданные точки называются *фокусами эллипса* (на черт. 10 фокусы обозначены через F_1 и F_2; точки M, M_1, M_2, M_3 лежат на эллипсе).

Легко построить эллипс, исходя из этого определения. Для этого укрепим концы нити данной длины в заданных



Черт. 11.

точках — фокусах F_1 и F_2 и затем, оттянув нить остро отточенным карандашом, заставим карандаш скользить по бумаге так, чтобы нить была натянута (черт. 11). В результате этого будет описана замкнутая линия (для того, чтобы линия получилась замкнутой, можно нить перекинуть через булавку, в которой она закреплена), которая является эллипсом, так

как сумма расстояний от любой точки этой кривой до точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, а именно, равная длине нити.

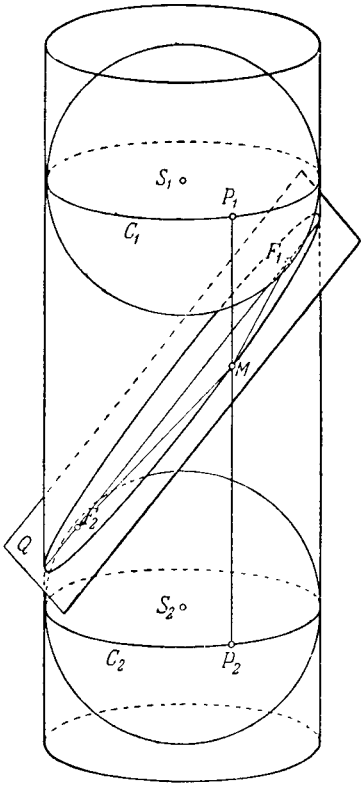
Окружность можно рассматривать как частный случай эллипса. Когда точки F_1 и F_2 совпадают, получается окружность.

Установим теперь относительно сечений цилиндра плоскостью следующее:

1) *если секущая плоскость параллельна образующим цилиндра, то в сечении получается пара параллельных прямых*; 2) *если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то в сечении получается окружность*; 3) *если секущая плоскость не параллельна образующим и не перпендикулярна к оси, то в сечении получится эллипс.*

Первые два утверждения очевидны, докажем третье.

Пусть Q — секущая плоскость, а S_1 и S_2 — две сферы, вписанные в цилиндр по обе стороны от плоскости Q (черт. 12), так что они касаются её в точках F_1 и F_2. Через C_1 и C_2 обозначим окружности, по которым S_1 и S_2 касаются цилиндра. Возьмём на сечении произвольную точку M и проведём через эту точку образующую. Обозначим через P_1P_2 отрезок этой образующей, заключённый между окружностями C_1 и C_2.

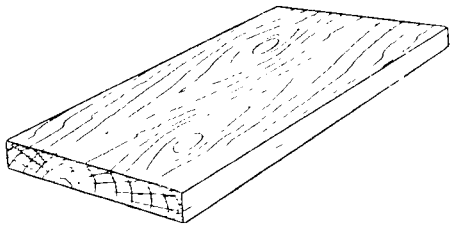


Черт. 12.

Заметим, что независимо от положения точки M на сечении отрезок P_1P_2 имеет одну и ту же длину.

Далее соединим точку M с точками F_1 и F_2. Так как секущая плоскость Q касается как шара S_1, так и шара S_2, то отрезки MF_1 и MF_2 являются отрезками касательных, проведённых из точки M, соответственно к шарам S_1 и S_2.

Кроме того, отметим, что отрезок MP_1 образующей касается шара S_1 в точке P_1, а отрезок MP_2 образующей касается шара S_2 в точке P_2. Но отрезки касательных, проведённых из одной и той же точки к одному и тому же шару, равны между собой; поэтому $MF_1 = MP_1$, $MF_2 = MP_2$.



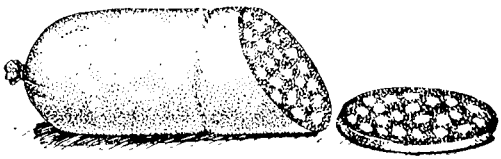
Черт. 13.

Складывая эти два равенства, находим, что

$$MF_1 + MF_2 = P_1P_2.$$

Таким образом, мы получили, что сумма расстояний любой точки сечения до точек F_1 и F_2 есть величина постоянная и, следовательно, сечение является эллипсом с фокусами в F_1 и F_2.

Только что рассмотренное геометрическое свойство плоских сечений цилиндра мы часто наблюдаем в окружающей



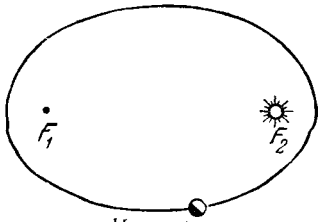
Черт. 14.

нас действительности. Например, форма среза сучков на сосновой доске эллиптическая, потому что сами сучки имеют цилиндрическую форму.

По этой же причине ломти нарезанной колбасы имеют эллиптическую форму.

Солнечный свет, проникая через круглое отверстие в тёмную комнату, даёт на полу эллиптическое световое пятно.

Эллипс является очень важной кривой. В технике для создания неравномерного вращения пользуются эллиптическими зубчатыми колёсами. Важное значение имеет эллипс в теории артиллерийской стрельбы («эллипс рассеяния снарядов»). Все планеты солнечной системы и в том числе наша Земля движутся вокруг Солнца по эллипсам; при этом Солнце находится в одном из фокусов эллипса (черт. 15).

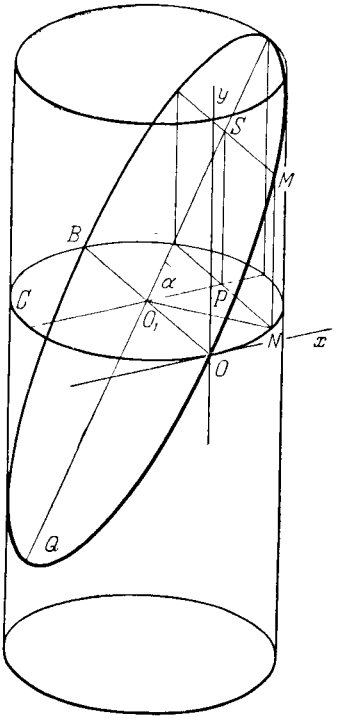


Черт. 15.

§ 3

В § 1 мы отмечали, что винтовая линия на развёртке цилиндра на плоскость изображается прямолинейными параллельными отрезками. Выясним теперь, как выглядит на развёртке цилиндра сечение цилиндра плоскостью. Ясно, что когда это сечение является парой параллельных прямых или окружностью, на развёртке цилиндра будет тоже пара параллельных прямых или отрезок прямой.

Рассмотрим случай, когда сечение является эллипсом. Проведём секущую плоскость Q через диаметр OB окружности C, являющейся сечением цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его оси, так, чтобы плоскость Q и плоскость



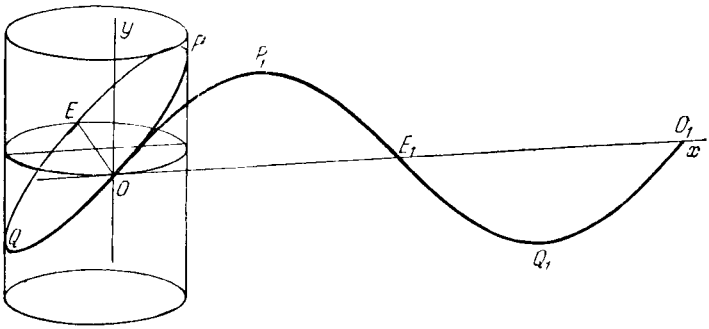
Черт. 16.

окружности составляли угол α, не равный ни 0, ни $\frac{\pi}{2}$ (черт. 16).

Введём систему координат в плоскости, касающейся цилиндра вдоль образующей, проходящей через точку O, следующим образом: начало в точке O, ось Ox — вдоль касательной к окружности C в точке O, а ось Oy — вдоль

образующей, проходящей через точку O. Если катить теперь цилиндр без скольжения на плоскости xOy так, чтобы окружность C катилась по оси x, то след от эллипса, полученного в сечении цилиндра плоскостью Q, на плоскости xOy будет представлять кривую, вид которой мы хотим определить.

Возьмём на эллипсе произвольную точку M (черт. 16), и пусть MN — отрезок образующей, заключённый между эллип-



Черт. 17.

сом и окружностью C. Далее через отрезок MN проведём плоскость $MNPS$, параллельную диаметру OB. В плоскости xOy отрезок MN равен ординате y, а длина дуги $\overset{\frown}{ON}$ — абсциссе x точки исследуемой кривой, соответствующей точке M. Радианная мера центрального угла NO_1O равна $\frac{x}{R}$ (R — радиус цилиндра). Из прямоугольного треугольника PNO_1 находим, что катет $O_1P = R\sin\frac{x}{R}$. Из прямоугольного треугольника PSO_1 найдём катет SP: $SP = R\sin\frac{x}{R}\cdot\operatorname{tg}\alpha$, но так как $SP = MN = y$, то

$$y = R\operatorname{tg}\alpha\sin\frac{x}{R}.$$

Последнее равенство показывает, что исследуемая кривая — синусоида с амплитудой $R\operatorname{tg}\alpha$.

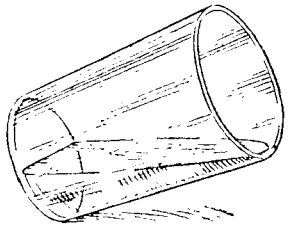
Всё изложенное выше показано на черт. 17. Цилиндр находится за плоскостью xOy и катится вправо без скольжения; при этом эллипс $OPEQ$ «раскатывается» в синусоиду $OP_1E_1Q_1O_1$. Последний факт используется при изготовлении

колен печных труб. В этом случае лист железа раскраивается по кривой $y = R \sin x$, так как колено согнуто под прямым углом ($\alpha = 45°$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$). На производстве пользуются готовыми шаблонами синусоиды.

§ 4

Рассмотрим задачу, в которой требуется вычислить объём некоторой части цилиндра.

Сосуд в форме прямого кругового цилиндра (радиус основания R, высота H) заполнен водой. Затем этот сосуд наклоняют, и часть воды при этом выливается, причём в результате этого обнажается точно половина дна сосуда. *Вычислить объём V оставшейся воды.*



Черт. 18.

Для решения нам нужна будет формула для суммы квадратов первых n чисел натурального ряда. Пусть $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$; покажем, что

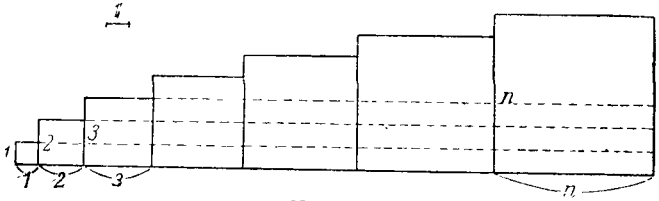
$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Заодно выведем, так как это понадобится впоследствии, формулу для нахождения суммы кубов первых n натуральных чисел, то-есть формулу

$$S_3(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

где $S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

Применим для вывода этих формул геометрические соображения. Будем рассматривать слагаемые 1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2



Черт. 19.

как площади квадратов со сторонами, соответственно равными 1, 2, 3, ..., n, а сумму $S_2(n)$ как площадь фигуры, составленной из этих квадратов (черт. 19).

Разбив эту фигуру на горизонтальные полоски шириной 1, мы получим её площадь, складывая площади этих полосок. Имеем, что площадь первой снизу полоски равна $1+2+3+4+\ldots+n$; площадь второй снизу полоски равна $2+3+4+\ldots+n$ и т. д. Таким образом, для $S_2(n)$ получаем выражение

$$S_2(n)=(1+2+3+\ldots+n)+(2+3+4+\ldots+n)+(3+\ldots+n)+\ldots+n.$$

Применяя формулу суммы членов арифметической прогрессии для каждой скобки, найдём:

$$S_2(n)=\frac{(n+1)n}{2}+\frac{(n+2)(n-1)}{2}+\frac{(n+3)(n-2)}{2}+$$
$$+\frac{(n+4)(n-3)}{2}+\ldots+\frac{(n+n)[n-(n-1)]}{2}=$$
$$=\frac{n^2+n-0\cdot 1}{2}+\frac{n^2+n-1\cdot 2}{2}+\frac{n^2+n-2\cdot 3}{2}+$$
$$+\frac{n^2+n-3\cdot 4}{2}+\ldots+\frac{n^2+n-(n-1)n}{2}.$$

Представляя третье слагаемое в числителе каждой дроби по формуле $(k-1)k=k^2-k$, перепишем $S_2(n)$ в виде

$$S_2(n)=\frac{1}{2}[n(n^2+n)+1-1^2+2-2^2+\ldots+n-n^2]=$$
$$=\frac{1}{2}[n(n^2+n)+(1+2+\ldots+n)-(1^2+2^2+\ldots+n^2)].$$

А это можно переписать:

$$S_2(n)=\frac{1}{2}\left[n(n^2+n)+\frac{(n+1)n}{2}-S_2(n)\right].$$

Отсюда

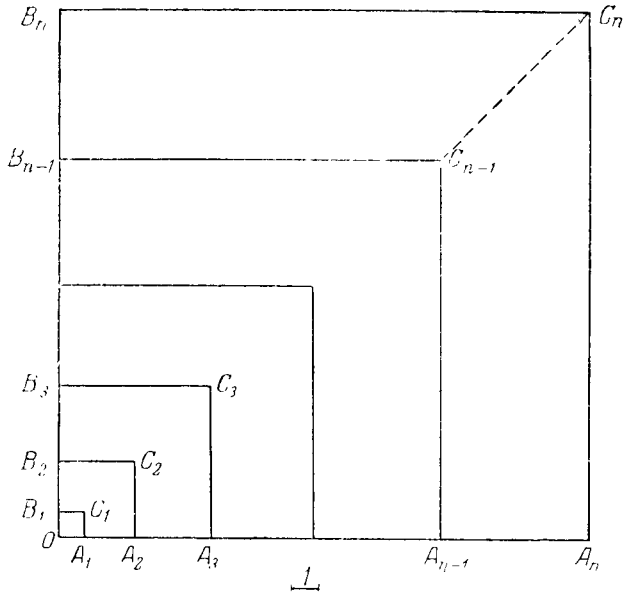
$$S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (3)$$

Для вывода формулы суммы кубов первых n натуральных чисел рассмотрим n квадратов, стороны которых имеют такие размеры: сторона первого квадрата имеет длину, равную 1, второго $1+2$, третьего $1+2+3$, ..., наконец, длина стороны n-го квадрата равна $1+2+3+\ldots+n$.

Расположим эти квадраты на плоскости так, как показано на черт. 20. Таким образом, $OA_1 = 1$, $OA_2 = 1 + 2$, $OA_3 = 1 + 2 + 3, \ldots$, $OA_{n-1} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1$, $OA_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Имеем также:

$$OA_1 = 1,\ A_1A_2 = 2,\ A_2A_3 = 3,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n = n.$$

Теперь найдём площадь σ_n фигуры $B_nC_nA_nA_{n-1}C_{n-1}B_{n-1}$. Соединяя точки C_n и C_{n-1}, разобьём её на две равные прямо-



Черт. 20.

угольные трапеции. Рассмотрим одну из них, например трапецию $C_{n-1}C_nA_nA_{n-1}$; её площадь равна

$$\frac{\sigma_n}{2} = \frac{A_nC_n + A_{n-1}C_{n-1}}{2} A_{n-1}A_n.$$

Но

$$A_nC_n = OA_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1)\,n}{2}.$$

Точно так же $A_{n-1}C_{n-1} = OA_{n-1} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Следовательно,

$$\frac{\sigma_n}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{(n+1)\,n}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\right] n$$

и после простых преобразований получаем:

$$\frac{\sigma_n}{2} = \frac{1}{2}\,n^3,$$

а площадь σ_n фигуры $B_nC_nA_nA_{n-1}C_{n-1}B_{n-1}$ равна n^3.

Рассуждая точно так же, найдём, что площадь σ_{n-1} фигуры $B_{n-1}C_{n-1}A_{n-1}A_{n-2}C_{n-2}B_{n-2}$ равна $(n-1)^3$, ..., площадь σ_3 фигуры $B_3C_3A_3A_2C_2B_2$ равна 3^3, площадь σ_2 фигуры $B_2C_2A_2A_1C_1B_1$ равна 2^3, и, кроме того, площадь σ_1 квадрата $OB_1C_1A_1$ равна 1^3.

Так как площадь квадрата $OB_nC_nA_n$ равна

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_{n-1} + \sigma_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3,$$

а с другой стороны эта же площадь равна

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

то

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \qquad (4)$$

Вспомним, что формула (3) в курсе средней школы была установлена иначе [1]).

Приступим теперь к решению задачи, сформулированной в начале параграфа. Обозначим через α угол, образованный поверхностью оставшейся жидкости с основанием цилиндра (черт. 21); тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{R}. \qquad (5)$$

Далее, так как часть цилиндра, заполненная водой, имеет плоскостью симметрии плоскость OLM (черт. 21), то достаточно найти объём тела $OLMA$ и затем удвоить его.

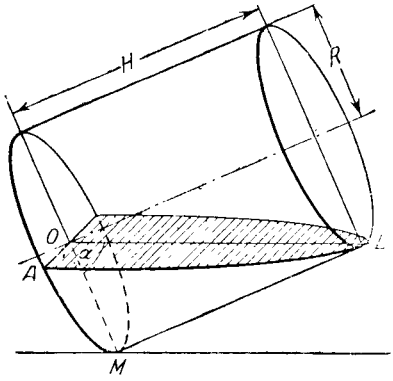
---

[1]) См. также книжку В. А. Кудрявцева «Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли» (ОНТИ, 1936), где даётся алгебраический вывод формул (3) и (4) и выводится рекуррентная формула для определения суммы k-х степеней n первых чисел натурального ряда.

Радиус основания OA цилиндра (черт. 22) разделим на n равных частей точками

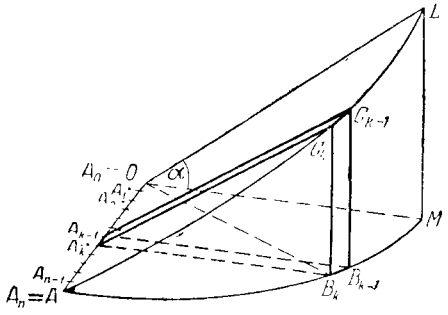
$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_{n-1}.$$

Будем ради единообразия обозначений точку O считать точ-



Черт. 21.

кой A_0, а точку A точкой A_n. Расстояние между двумя любыми соседними точками деления равно $\frac{R}{n}$. Через точки



Черт. 22.

деления проведём плоскости, перпендикулярные к радиусу OA. Этими плоскостями тело $OLMA$ разрезается на n слоёв. Если бы удалось определить объёмы этих слоёв, то, сложив их, мы нашли бы искомый объём. Рассмотрим

слой, содержащийся между плоскостями, проведёнными через точки A_{k-1} и A_k.

Чем мельче деления радиуса OA (то-есть чем больше n), тем больше оснований считать k-й слой треугольной призмой. Итак, считая приближённо k-й слой призмой, найдём её объём. Высота призмы (толщина слоя) равна $A_{k-1}A_k$, то-есть равна, как уже отмечалось прежде, $\frac{R}{n}$. Далее, площадь основания призмы равна площади прямоугольного треугольника $A_kB_kC_k$, то-есть равна $\frac{1}{2}A_kB_k \cdot B_kC_k$.

Но так как на основании (5) $B_kC_k = A_kB_k \operatorname{tg}\alpha = A_kB_k\frac{H}{R}$, то объём k-й призмы равен $\frac{1}{2}\left(A_kB_k\right)^2\frac{H}{R}\cdot\frac{R}{n} = \frac{1}{2}\left(A_kB_k\right)^2\frac{H}{n}$.

Из прямоугольного треугольника OA_kB_k находим, что $\left(A_kB_k\right)^2 = R^2 - \left(OA_k\right)^2$, а так как $OA_k = k\cdot\frac{R}{n}$, то $\left(A_kB_k\right)^2 = R^2 - k^2\frac{R^2}{n^2} = \frac{R^2}{n^2}(n^2-k^2)$.

Итак, объём k-го слоя приближённо равен

$$\frac{R^2H}{2n^3}(n^2-k^2).$$

Полагая здесь k последовательно равным 1, 2, 3, ..., n, найдём приближённые значения объёмов для первого, второго, ..., n-го слоёв. Складывая их, получим, что объём тела $OLMA$ приближённо равен

$$\frac{R^2H}{2n^3}(n^2-1^2)+\frac{R^2H}{2n^3}(n^2-2^2)+\frac{R^2H}{2n^3}(n^2-3^2)+\ \ldots$$

$$\ldots+\frac{R^2H}{2n^3}[n^2-(n-1)^2]+\frac{R^2H}{2n^3}(n^2-n^2) =$$

$$= \frac{R^2H}{2n^3}[n\cdot n^2-(1^2+2^2+3^2+\ \ldots\ +n^2)] =$$

$$= \frac{R^2H}{2n^3}\left[n^3-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{R^2H}{2}\left[1-\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}\right].$$

Вспоминая, что объём тела $OLMA$ вдвое меньше искомого объёма V, приходим к приближённому равенству

$$V \approx R^2H\left[1-\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}\right].$$

Как уже отмечалось, последнее равенство будет тем более точным, чем больше значение для n. Поэтому точное значение для V находим, переходя к пределу при $n \to \infty$

$$V = \lim_{n \to \infty} R^2 H \left[1 - \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} \right],$$

откуда

$$V = \frac{2}{3} R^2 H.$$

Интересно отметить, что в последнюю формулу не входит число π, в то время как объём всего цилиндра равен, как хорошо известно,

$$\pi R^2 H.$$

§ 5

Рассмотрим одну задачу из механики, связанную с прямым круговым цилиндром. Пусть цилиндр радиуса R и высоты H равномерно вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Цилиндр сделан из однородной массы, плотность которой равна ρ. *Требуется вычислить кинетическую энергию вращающегося цилиндра.* Необходимость в решении такой задачи может возникнуть во многих технических вопросах.

Из курса физики известно, что кинетическая энергия точечной массы (то-есть такой массы, размерами которой пренебрегаем), движущейся со скоростью, по величине равной v, равна $\frac{mv^2}{2}$.

Если же имеется система материальных точек, массы которых равны m_1, m_2, ..., m_n, а их скорости соответственно равны v_1, v_2, ..., v_n, то кинетическая энергия этой системы точек равна сумме кинетических энергий составляющих её точек, то-есть равна

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \ldots + \frac{m_n v_n^2}{2}.$$

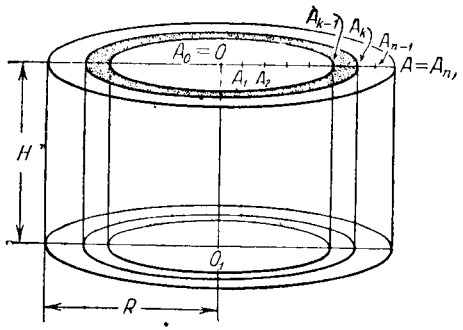
Если бы некоторые из этих точек имели равные по величине (и не обязательно по направлению) скорости, то для этих точек общая кинетическая энергия была бы равна сумме масс таких точек, умноженной на половину квадрата общей для них величины скорости.

Хотя цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью ω, точки, находящиеся на различных расстояниях от оси, имеют разные линейные скорости. Точки, близкие к оси, имеют скорость, близкую к нулю, точки, лежащие на поверхности цилиндра, имеют наибольшую скорость.

Однако точки цилиндра, находящиеся на одинаковом расстоянии от оси цилиндра, имеют равные по величине линейные скорости, причём для нахождения величины v этой скорости справедлива формула

$$v = r\omega, \tag{6}$$

где r — расстояние рассматриваемых точек до оси. Очевидно, все такие точки расположены на цилиндрической поверхности радиуса r, расположенной внутри данного цилиндра.



Черт. 23.

Радиус основания цилиндра OA (черт. 23) разделим на n одинаковых частей точками A_1, A_2, ..., A_{n-1}, причём по-прежнему считаем, что точка A_0 совпадает с точкой O, а точка A_n совпадает с точкой A. Далее через точки деления проведём цилиндрические поверхности с общей осью OO_1, которые разделят цилиндр на n цилиндрических слоёв. Все цилиндрические слои имеют одинаковую толщину, равную $\frac{R}{n}$.

Можно приближённо считать, что в пределах каждого цилиндрического слоя все точки имеют равные по величине скорости. Последнее предположение тем более верно, чем больше число n. Поэтому следует поступить так: найти приближённо кинетические энергии каждого цилиндрического

слоя и найденные величины сложить, в результате получив приближённое значение E_n искомой кинетической энергии всего цилиндра. Значение кинетической энергии E определим при помощи предельного равенства

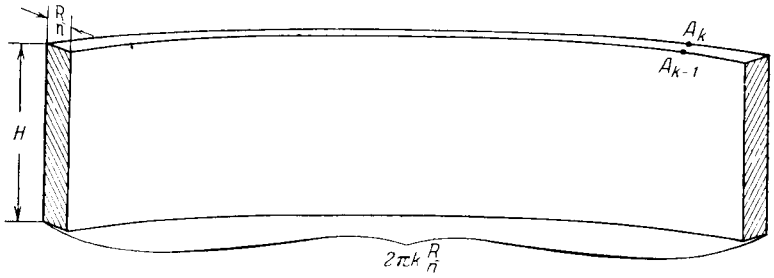
$$E = \lim_{n\to\infty} E_n.$$

Переходим к осуществлению этого плана решения задачи.

Рассмотрим k-й цилиндрический слой, содержащийся между цилиндрическими поверхностями, проходящими через точки деления A_{k-1} и A_k. Внешний радиус этого слоя равен длине отрезка OA_k, то-есть равен $k\frac{R}{n}$, внутренний радиус OA_{k-1} имеет длину $(k-1)\frac{R}{n}$. Приближённо считаем, что все точки рассматриваемого слоя имеют одну и ту же величину скорости v_k, равную скорости точки A_k, поэтому

$$v_k = OA_k \cdot \omega = k\frac{R}{n}\omega. \qquad (7)$$

Найдём приближённо массу k-го слоя. Для этого разрежем этот слой плоскостью, проходящей через ось OO_1 и



Черт. 24.

какую-нибудь образующую. Выпрямляя этот слой, получим тело, которое можно приближённо считать параллелепипедом, у которого высота равна высоте цилиндра H, толщина равна толщине слоя $\frac{R}{n}$, а длина равна длине окружности основания $2\pi \cdot OA_k = 2\pi k\frac{R}{n}$ (черт. 24).

После этого легко находим приближённое значение объёма и массы m_k k-го цилиндрического слоя:

$$m_k \approx \rho 2\pi k \frac{R}{n} H \frac{R}{n} = \frac{2\pi R^2 H \rho}{n^2} k. \qquad (8)$$

Тогда кинетическая энергия k-го цилиндрического слоя на основании (7) и (8) равна

$$\frac{m_k v_k^2}{2} \approx \frac{\pi R^2 H \rho}{n^2} k k^2 \omega^2 \frac{R^2}{n^2} = \frac{\pi R^4 H \rho \omega^2 k^3}{n^4}.$$

Полагая k равным 1, 2, 3, ..., n, получим кинетические энергии соответственно для первого, второго, третьего, ..., n-го слоёв, а потому приближённое значение кинетической энергии E_n определяется равенством

$$E_n = \frac{\pi R^4 H \rho \omega^2}{n^4} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3).$$

Наконец, точное значение E кинетической энергии равно

$$E = \lim_{n \to \infty} \frac{\pi R^4 H \rho \omega^2}{n^4} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3).$$

Подставим вместо $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ выражение из формулы (4); тогда

$$E = \lim_{n \to \infty} \frac{\pi R^4 H \rho \omega^2}{n^4} \left[\frac{(n+1)n}{2}\right]^2 = \lim_{n \to \infty} \frac{\pi R^4 H \rho \omega^2}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

и окончательно

$$E = \frac{\pi R^4 H \rho \omega^2}{4}.$$

Далее, так как масса M цилиндра равна $M = \pi R^2 H \rho$, то полученную формулу можно переписать в виде

$$E = \frac{MR^2}{2} \frac{\omega^2}{2}. \qquad (9)$$

Можно сравнительно просто доказать формулу кинетической энергии для тела произвольной формы при вращении его вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω:

$$E = J \cdot \frac{\omega^2}{2}, \qquad (10)$$

где величина J называется *моментом инерции тела относительно данной оси.*

Из сравнения формул (9) и (10) видно, что момент инерции однородного цилиндра относительно его оси

$$J_{\text{ц}} = \frac{MR^2}{2}.$$

Дальнейшие подробности относительно формулы (10) и вычисления моментов инерции излагаются в курсах теоретической механики и высшей математики.

§ 6

Сосуд, имеющий форму цилиндра с вертикальными образующими, высотой H и радиусом основания R, заполнен водой. На круглом дне этого сосуда имеется малое отверстие, площадь которого равна σ, через которое вода вытекает. *Требуется вычислить время* T_α, *в течение которого уровень воды в сосуде понизится от первоначального значения* H *до значения* α, $0 < \alpha < H$. (Все величины измерены в системе CGS.)

При решении задачи нужно иметь в виду, что с понижением уровня воды в цилиндре будет ослабевать напор воды в отверстии и, следовательно, будет уменьшаться скорость истечения воды. Переменная скорость истечения воды значительно усложняет решение поставленной задачи.

Если бы скорость истечения была постоянной (что не соответствует действительности), задача решалась бы сразу с помощью арифметики.

Для решения поставленной задачи воспользуемся формулой для нахождения скорости истечения v. Эта формула устанавливается в физике и имеет следующий вид:

$$v = \sqrt{2gh}, \tag{11}$$

где h — уровень жидкости в сосуде, а g — ускорение силы тяжести. Из этой формулы видно, что если уровень воды понизится в 4, 9, 16 раз, то скорость истечения v уменьшится соответственно в 2, 3, 4 раза.

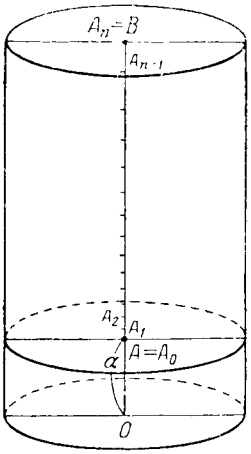
Пусть точка A (черт. 25) находится на высоте α над дном сосуда, точка B на высоте H, и пусть точки A и B лежат на оси цилиндра. Разобьём отрезок AB на n частей. В этой задаче, в отличие от прежних, деление отрезка AB на n равных частей было бы неудобным, как мы увидим из дальнейшего.

Решение задачи значительно упрощается, если точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ разбивают отрезок AB на n частей так, что

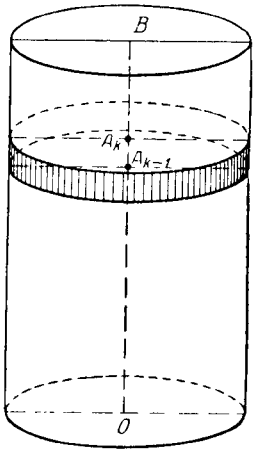
отрезки OA, OA_1, OA_2, OA_3, ..., OA_{n-1}, OA_n образуют геометрическую прогрессию, то-есть длины этих отрезков соответственно равны α, αq, αq^2, αq^3, ..., αq^{n-1}, αq^n, где знаменатель прогрессии q определяется из равенства $\alpha q^n = H$:

$$q = \sqrt[n]{\frac{H}{\alpha}}.$$

Ясно, что $q > 1$ и длины n частичных отрезков AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}B$ расположены в порядке возрастания. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} q = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{H}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, то длины всех частичных отрезков стремятся к нулю при неограниченном возрастании n.



Черт. 25.



Черт. 26.

Проведём через точки

$$A,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{n-1},\ B$$

плоскости, перпендикулярные к оси цилиндра; тогда вся жидкость разделится этими плоскостями на n горизонтальных слоёв. На основании изложенного выше можно взять n настолько большим, чтобы толщины этих слоёв были как угодно малы.

Рассмотрим k-й слой жидкости ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$), содержащийся между плоскостями, проведёнными через точки A_{k-1} и A_k (черт. 26). Толщину этого слоя $A_{k-1}A_k =$

$= \alpha q^k - \alpha q^{k-1} = \alpha q^{k-1}(q-1)$ при достаточно большом n можно считать очень малой, а потому приближённо считаем, что все точки этого слоя находятся на одной и той же высоте над отверстием в сосуде. Поэтому, когда уровень жидкости понижается от точки A_k до точки A_{k-1}, то будем считать, что скорость v_k истечения жидкости остаётся постоянной и равна на основании (11)

$$v_k = \sqrt{2g \cdot OA_{k-1}} = \sqrt{2g\alpha q^{k-1}}.$$

Если обозначить время истечения k-го слоя через t_k, то $t_k v_k \sigma$ должно быть равно объёму жидкости этого слоя, то-есть $t_k v_k \sigma = \pi R^2 \cdot A_{k-1}A_k$.

Отсюда, подставляя значение $A_{k-1}A_k$ и v_k, получим:

$$t_k = \frac{\pi R^2 (\alpha q^k - \alpha q^{k-1})}{\sigma \sqrt{2g\alpha q^{k-1}}}.$$

Полагая k равным 1, 2, 3, ..., n, найдём время истечения первого, второго, третьего, ..., n-го слоёв, и приближённо время истечения T_α жидкости до уровня α можно считать равным

$$T_\alpha \approx \frac{\pi R^2 (\alpha q - \alpha)}{\sigma \sqrt{2g\alpha}} + \frac{\pi R^2 (\alpha q^2 - \alpha q)}{\sigma \sqrt{2g\alpha q}} + \ldots + \frac{\pi R^2 (\alpha q^n - \alpha q^{n-1})}{\sigma \sqrt{2g\alpha q^{n-1}}}.$$

Вынося за скобки общий множитель, получим после сокращений

$$T_\alpha \approx \frac{\pi R^2}{\sigma \sqrt{2g}} \sqrt{\alpha}(q-1)\left(1 + q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{2}{2}} + q^{\frac{3}{2}} + \ldots + q^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Далее, пользуясь формулой для суммы членов геометрической прогресии, знаменатель которой равен $q^{\frac{1}{2}}$, найдём, что

$$1 + q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{2}{2}} + q^{\frac{3}{2}} + \ldots + q^{\frac{n-1}{2}} = \frac{q^{\frac{n}{2}} - 1}{q^{\frac{1}{2}} - 1}.$$

Значит,

$$T_\alpha \approx \frac{\pi R^2}{\sigma \sqrt{2g}} \sqrt{\alpha}(q-1) \frac{q^{\frac{n}{2}} - 1}{q^{\frac{1}{2}} - 1}$$

или, подставляя $q = \left(\frac{H}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}$, получим:

$$T_\alpha \approx \frac{\pi R^2}{\sigma \sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{\alpha}) \left[\left(\frac{H}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2n}} + 1 \right].$$

Точность последнего приближённого равенства тем больше, чем больше число n. Неограниченно увеличивая n ($n \to \infty$), получим в пределе точное значение для времени истечения T_α:

$$T_\alpha = \lim_{n \to \infty} \frac{\pi R^2}{\sigma \sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{\alpha}) \left[\left(\frac{H}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2n}} + 1 \right].$$

Окончательно

$$T_\alpha = \frac{2\pi R^2}{\sigma \sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{\alpha}).$$

Если в последней формуле положить $\alpha = 0$, то время T_0 истечения всей жидкости из цилиндра определяется равенством

$$T_0 = \frac{\pi R^2}{\sigma} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

§ 7

В этом параграфе будет разобрана задача о наиболее выгодных размерах цилиндра.

Вот формулировка этой задачи:

Найти радиус и высоту прямого кругового цилиндра, который при заданной полной поверхности S имеет наибольший объём.

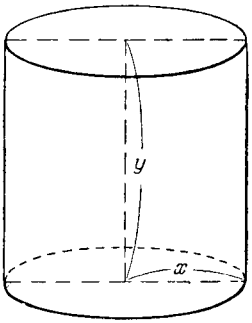
Для ясного понимания задачи нужно иметь в виду, что цилиндров, имеющих одну и ту же полную поверхность S, существует бесконечное число. Задача состоит в том, чтобы среди всех таких цилиндров найти тот, который имеет наибольший объём.

Ясно, что можно построить цилиндр, имеющий полную поверхность S и такой, что он будет очень высоким, но тогда он будет с очень малым радиусом основания (цилиндр в форме длинной тонкой трубки), и его объём можно сделать как угодно малым при дальнейшем уменьшении радиуса. Точно так же можно увеличивать радиус основания, уменьшая при этом высоту, чтобы полная поверхность неизменно оста-

валась равной S и получить цилиндр с широким основанием, но с малой высотой (цилиндр, напоминающий по форме монету), имеющий также очень малый объём. Очевидно, между этими двумя крайними случаями существует цилиндр с полной поверхностью, равной S, такой, что его объём является наибольшим.

После этих замечаний предварительного характера приступим к решению поставленной задачи.

Обозначим радиус основания цилиндра через x, а высоту через y (черт. 27). По смыслу решаемой задачи величины x и y могут быть только положительными. Последнее обстоятельство существенным образом используется в решении. Далее обозначим через V объём цилиндра и через S постоянную величину его полной поверхности.



Черт. 27.

Для определения объёма цилиндра пользуемся хорошо известной формулой

$$V = \pi x^2 y. \qquad (12)$$

Таким образом, V зависит от двух переменных x и y, но так как полная поверхность S задана, то между x и y существует связь, выражаемая равенством $2\pi xy + 2\pi x^2 = S$ или, деля на 2π:

$$xy + x^2 = \frac{S}{2\pi}. \qquad (13)$$

Для значительного упрощения последующих выкладок удобно вместо постоянной величины $\frac{S}{2\pi}$ ввести другую постоянную величину λ, полагая, что

$$\frac{S}{2\pi} = 3\lambda^2 \qquad (14)$$

или, что то же, $S = 6\pi\lambda^2$.

Согласно этой замене (13) можно переписать так: $xy + x^2 = 3\lambda^2$, откуда

$$y = \frac{3\lambda^2}{x} - x. \qquad (15)$$

Подставляя это значение в формулу (12), находим:

$$V = \pi(3\lambda^2 x - x^3). \qquad (16)$$

Такова зависимость между радиусом основания x и объёмом V цилиндра при постоянной величине полной поверхности S. Нужно найти такое значение x, при котором объём V был бы наибольшим. С этой целью перепишем формулу (16), прибавляя и вычитая в правой части (16) одно и то же слагаемое $2\pi\lambda^3$; тогда

$$V = 2\pi\lambda^3 - \pi(x^3 - 3\lambda^2 x + 2\lambda^3). \qquad (17)$$

Для дальнейшего удобно разложить на множители выражение, находящееся в круглых скобках правой части (17):

$$\begin{aligned} x^3 - 3\lambda^2 x + 2\lambda^3 &= x^3 - \lambda^3 - (3\lambda^2 x - 3\lambda^3) = \\ &= (x-\lambda)(x^2 + \lambda x + \lambda^2) - 3\lambda^2(x-\lambda) = \\ &= (x-\lambda)(x^2 + \lambda x - 2\lambda^2) = \\ &= (x-\lambda)[(x^2 - \lambda x) + (2\lambda x - 2\lambda^2)] = \\ &= (x-\lambda)[x(x-\lambda) + 2\lambda(x-\lambda)] = (x-\lambda)^2(x+2\lambda). \end{aligned}$$

После этого (17) можно переписать в следующем виде:

$$V = 2\pi\lambda^3 - \pi(x-\lambda)^2(x+2\lambda). \qquad (18)$$

Отсюда видно, что объём цилиндра V равен разности между положительной постоянной величиной $2\pi\lambda^3$ и переменной величиной $\pi(x-\lambda)^2(x+2\lambda)$.

Третий множитель, то-есть $(x+2\lambda)$, является суммой положительной величины x и положительного числа 2λ, а потому при любых $x > 0$ этот множитель положителен; второй множитель, то-есть $(x-\lambda)^2$ положителен при всех значениях $x \neq \lambda$ и обращается в нуль только при $x = \lambda$.

Итак, вычитаемое в правой части (18) неотрицательно при любых $x > 0$. Поэтому объём V тогда и только тогда будет наибольшим, когда это вычитаемое получит возможно меньшее значение. Но наименьшее значение для него равно нулю, а именно только тогда, когда $x = \lambda$, и в этом случае

$$V_{\max} = 2\pi\lambda^3.$$

Итак наибольший объём имеет тот цилиндр, у которого радиус основания

$$x = \lambda.$$

Из формулы (15) найдём высоту этого цилиндра

$$y = \frac{3\lambda^2}{\lambda} - \lambda = 2\lambda.$$

Итак: цилиндр имеет наибольший объём при заданной полной поверхности S тогда и только тогда, когда радиус основания $x = \lambda$, а высота цилиндра $y = 2\lambda$, где λ определяется из (14), но это означает, что цилиндр имеет наибольший объём при заданной полной поверхности S тогда и только тогда, когда его осевое сечение является квадратом со стороной, равной $2\lambda = 2\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$.

Рассмотренная нами задача имеет большое практическое значение. Результаты этой задачи используются, например, в консервной промышленности при изготовлении жестяных консервных банок. Там, где форма консервных банок не зависит от продукции, изготовление их в нужной пропорции между радиусом основания и высотой ($2R = H$) позволяет получить значительную экономию в средствах.

§ 8

Прежде чем переходить к основному вопросу настоящего параграфа, напомним одно предельное равенство, которое доказывается, например, в школьном учебнике тригонометрии Рыбкина и которое здесь мы доказывать не будем. Записывается оно в виде

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (19)$$

(здесь x — радианная мера угла) и потребуется нам в дальнейшем.

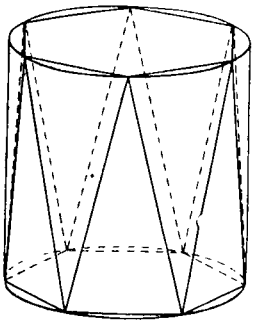
Будем говорить, что многогранник вписан в какую-нибудь поверхность, если каждая вершина многогранника лежит на этой поверхности. Например, куб вписан в сферу, если все восемь вершин куба лежат на поверхности сферы. Точно так же скажем, что тетраэдр вписан в некоторую поверхность (поверхность необязательно должна быть замкнутой), если каждая вершина этого тетраэдра лежит на этой поверхности. Заметим, что в дальнейшем не только сама поверхность, но и вписанный в неё многогранник необязательно должен быть замкнутым.

Пусть в данный кусок поверхности вписан многогранник, и пусть число граней этого многогранника неограниченно увеличивается, причём так, что каждая грань, неограниченно уменьшаясь, стягивается в точку, но при всех этих изменениях

многогранник всегда остаётся вписанным в рассматриваемый кусок поверхности, и, кроме того, предполагается, что на поверхности нет «пустошей», не занятых многогранником.

И вот возникает вопрос: можно ли определить площадь поверхности как предел площадей, вписанных в эту поверхность многогранников, когда число граней их неограниченно увеличивается, а площади граней неограниченно уменьшаются?

Ответ на этот вопрос на первый взгляд не вызывает сомнений и кажется, что таким способом действительно можно определить площадь поверхности. Но оказывается, что такой способ определения площади поверхности непригоден, как это следует из примера, приводимого ниже.



Черт. 28.

На простейшем примере, а именно на примере цилиндра будет показано, что нельзя определять площадь поверхности как предел площади многогранника, вписанного в эту поверхность (в разбираемом случае — в цилиндр), когда все грани его, неограниченно уменьшаясь, стягиваются в точку.

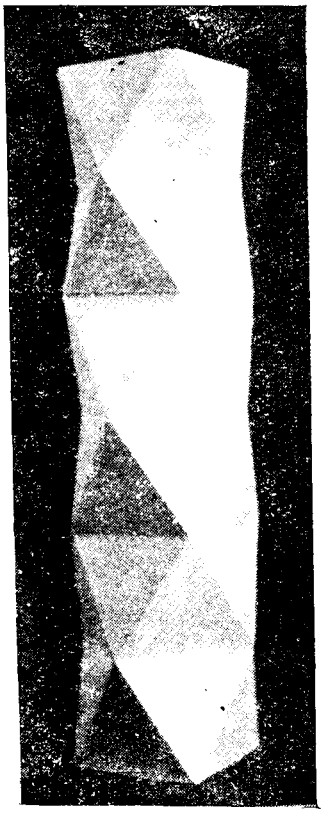
Так как прямой круговой цилиндр представляет собой поверхность, неограниченно простирающуюся вдоль оси, то рассмотрим «отрезок» цилиндра. Пусть «длина» этого «отрезка» равна H. Обозначим также радиус цилиндра через R.

Впишем в этот цилиндр многогранник, все грани которого — равные между собою треугольники, следующим образом. Разделим высоту H этого цилиндра на m равных частей и через получившиеся точки деления высоты проведём плоскости, перпендикулярные к высоте. Этим поверхность цилиндра разделяется на m цилиндрических поясов одинаковой высоты $\frac{H}{m}$. При этом на поверхности цилиндра получится $m+1$ окружностей, разделяющих эти цилиндрические пояса. Каждую из этих окружностей разделим на n равных частей так, чтобы точки деления любой окружности лежали против середины частичных дуг соседних окружностей.

Построим теперь треугольники, каждый из которых составлен хордой любой частичной дуги и отрезками прямых,

соединяющих концы этой хорды с точкой деления соседней окружности, лежащей против середины рассматриваемой частичной дуги (на черт. 28 показан один пояс, $n = 6$).

Из построения следует, что все получающиеся треугольники являются равнобедренными и, кроме того, они все между собою равны. Далее, так как все три вершины любой грани образовавшегося многогранника лежат на поверхности цилиндра, то этот многогранник (при любых m и n) вписан в цилиндр. В каждом цилиндрическом поясе таких треугольников имеется $2n$ (n треугольников, обращённых зубцами вверх, и n треугольников, обращённых зубцами вниз), и так как поверхность цилиндра разделена на m поясов, то вписанный многогранник содержит $2mn$ равных треугольников. О форме изучаемого многогранника даёт общее представление помещаемая здесь фотография (черт. 29). Модель многогранника легко сделать самому из одного куска бумаги.



Черт. 29.

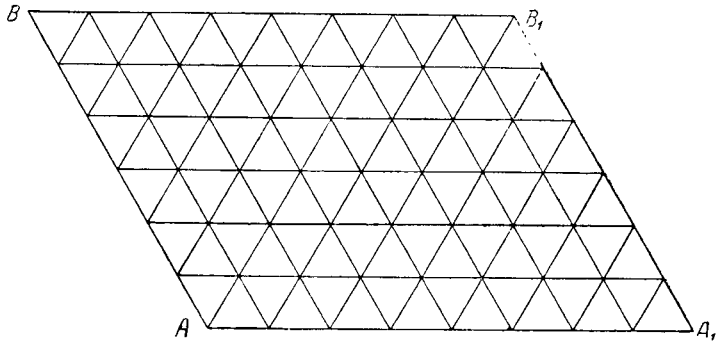
Для этого нужно на листе плотной бумаги размером примерно 30×40 сантиметров (лучше всего взять чертёжную бумагу) начертить параллелограмм, подобный параллелограмму ABB_1A_1 чертежа 30. Лист бумаги следует согнуть по каждой начерченной прямой (обязательно сгибать в обе стороны!). После этого, согнув параллелограмм в трубку и совместив точку A с точкой A_1, а точку B с точкой B_1, склеить модель вдоль прямой AB.

Вернёмся теперь к нашему $2mn$-граннику, который вписан в цилиндр. Для вычисления площади его достаточно вычислить площадь одного треугольника и затем умножить её на $2mn$.

Итак, вычислим площадь одного из этих треугольников. Обозначим вершины треугольника через A, B и C (черт. 31). Угол AOB равен $\frac{2\pi}{n}$, и поэтому хорда $AB = 2R\sin\frac{\pi}{n}$. Отрезок KE найдём по формуле

$$KE = R - R\cos\frac{\pi}{n} = 2R\sin^2\frac{\pi}{2n}.$$

Тогда из прямоугольного треугольника CEK, так как катет $CK = \frac{H}{m}$, по теореме Пифагора можно найти гипотенузу CE,



Черт. 30.

которая вместе с тем является высотой треугольника ABC. Итак, $CE = \sqrt{(CK)^2 + (KE)^2} = \sqrt{\frac{H^2}{m^2} + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}$, а потому площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}AB \cdot EC =$ $= R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{H^2}{m^2} + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}$.

Тогда на основании изложенного прежде площадь вписанного в цилиндр многогранника равна

$$S_{mn} = 2mnR\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{H^2}{m^2} + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}},$$

или немного иначе

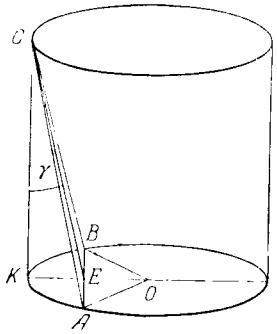
$$S_{mn} = 2\pi RH\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\sqrt{1 + 4\frac{R^2}{H^2}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{m}}}\right)^4}. \qquad (20)$$

Пусть m и n неограниченно возрастают; тогда каждая грань стягивается в точку; при этом S_{mn} изменяется, и нужно выяснить, существует ли предел S_{mn}.

Для понимания последующего необходимо иметь в виду, что деление высоты H цилиндра на m равных частей и деление каждой окружности на n тоже равных частей являются действиями, совершенно не связанными между собой. Другими словами, значения для m и n выбираются независимо друг от друга. И если это так, то можно в одном случае считать, что $m = n$, в другом $m = n^2$ и т. д.

Переходим к исследованию S_{mn}. Прежде всего отметим, что при $n \to \infty$ выражение $\frac{\pi}{n}$ стремится к нулю $\left(\frac{\pi}{n} \to 0\right)$, и на основании предельного равенства (20) получим, полагая $\frac{\pi}{n} = x$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Черт. 31.

Итак, последний множитель, стоящий перед знаком корня в формуле (20), стремится к пределу, равному единице, когда n стремится к бесконечности.

Далее, сначала предположим, что $m = n$; тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{m}}} \right)^4 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right)^4 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sin\frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2} \right)^2 = 0,$$

и потому в этом частном предположении из формулы (20) находим:

$$\lim_{n\to\infty} S_{mn} = 2\pi RH \cdot 1 \cdot \sqrt{1+0} = 2\pi RH,$$

т. е. в частном предположении — при $m = n$ — в пределе получается число, совпадающее с величиной боковой поверхности цилиндра.

Будем теперь считать $m = n^2$, и в этом случае найдём:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{m}}}\right)^4 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n}}\right)^4 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^4 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)^4 = \frac{\pi^4}{16}.$$

Учитывая это последнее предельное равенство, находим, что при $m = n^2$

$$\lim_{n\to\infty} S_{mn} = 2\pi RH\cdot 1\sqrt{1+\frac{\pi^4R^2}{H^2}} > 2\pi RH,$$

то-есть, если неограниченно увеличивать m и n так, чтобы $m = n^2$, то несмотря на то, что каждая грань, уменьшаясь, стягивается в точку, предел площади многогранника не равен боковой поверхности цилиндра $2\pi RH$, а больше её.

Объяснение этому кажущемуся парадоксу состоит в следующем. В первом из двух разобранных случаев, а именно, когда $m = n$, угол, образованный каждой гранью многогранника с образующей цилиндра стремится к нулю при $n\to\infty$, то-есть многогранник при $n\to\infty$ стремится распластаться на боковой поверхности цилиндра. Докажем, что это так. Обозначим через γ угол ECK, образованный гранью и образующей цилиндра (черт. 31); тогда имеем:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{EK}{KC} = \frac{2R\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\frac{H}{m}},$$

но так как $m = n$, то

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2R}{H}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}.$$

Отсюда находим с помощью (19), что

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}\gamma = \frac{2R}{H}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 0\cdot 1 = 0,$$

то-есть доказано, что в пределе при $n\to\infty$ угол между гранью и образующей цилиндра равен нулю.

Во втором случае, то-есть когда $m = n^2$, имеем:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2R}{H}\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{m}} = \frac{2R}{H}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n}}\right)^2 = \frac{\pi^2 R}{2H}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2.$$

Отсюда с помощью (19) находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}\gamma = \frac{\pi^2 R}{2H}.$$

Таким образом, грани вписанного многогранника при $n\to\infty$, если $m = n^2$, стремятся в пределе составить с образующими цилиндра острый угол γ_0, определяемый равенством $\gamma_0 = \operatorname{arctg}\frac{\pi^2 R}{2H}$.

Если же предположить $m = n^4$, то прежние рассуждения покажут, что

$$\lim S_{mn} = \infty,$$

а угол, к которому стремится как к пределу угол, образованный гранью и образующей цилиндра, равен при $n\to\infty$ $\frac{\pi}{2}$, то-есть предельное положение грани многогранника является перпендикулярным к образующим цилиндра. Поверхность вписанных многогранников имеет «гоpосистый» характер (тем более торосистый, чем больше n).

Таким образом, рассматривая предел площади многогранника S_{mn}, вписанного в цилиндр, мы получаем различные значения для этого предела, смотря по тому, какое предположение о сравнительной быстроте роста m и n сделано. Если же имеет место произвольный характер возрастания m и n к бесконечности, то S_{mn} ни к какому пределу не стремится.

Отсюда следует, что такой способ определения площади поверхности является непригодным.

Маракьян Гайдзаг Миронович.
Прямой круговой цилиндр.

Редактор *Э. П. Тихонова*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов.*

Корректор *О. А. Сигал.*

Сдано в набор 11/III 1955 г. Подписано к печати 8/VI 1955 г. Бумага 84×108 1/32.
Физ. печ. л. 1,25 Услови. печ. л. 2,05.
Уч.-изд. л. 2,01. Гираж 25 000 экз. Т-04905.
Цена книги 60 коп. Заказ № 253.

Государственное издательство технико-теоретической литературы.
Москва В-71, Б. Калужская, 15.

Министерство культуры СССР.
Главное управление полиграфической промышленности.
4-я тип. им. Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29